12-11-20

Θεώρημα (9): (Υποβιβασμός τάξης).

Ας είναι y_1 μία λύση της ομογενούς γ.δ.ε. (E_0^n) με $y_1(t)\neq 0, t\in I$. Για $y=uy_1$, $u=u'$ η εξίσωση (E_0^n) μετασχηματίζεται σε μία $n-1$-τάξης (E_0^*). Αν $u_1,\dots,u_{n-1}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της εξίσωσης (E_0^*) και:

$$y_i(t)=y_1(t)\cdot\int_{t_0}^{t}u_{i-1}(s)\,ds,\ t\in I,\ i=2,\dots,n.$$

τότε το σύνολο $S=\{y_i(t), t\in I\ (i=1,\dots,n)\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της εξίσωσης (E_0^n).

Απόδειξη: Για $y=uy_1$ έχουμε:

$$\begin{cases} a_0y=a_0uy_1\\ a_1y'=a_1[uy_1'+u'y_1]\\ \vdots\\ a_ky^{(k)}=a_k[u\cdot y_1^{(k)}+\binom{k}{1}u'\cdot y_1^{(k-1)}+\binom{k}{2}u''y_1^{(k-2)}+\dots+k\cdot u^{(k-1)}y_1'+u^{(k)}\cdot y_1]\\ \vdots\\ a_{n-1}y^{(n-1)}=a_{n-1}[u\cdot y_1^{(n-1)}+(n-1)u'y_1^{(n-2)}+\dots+(n-1)u^{(n-2)}y_1'+u^{(n-1)}y_1]\\ a_ny^{(n)}=a_n[uy_1^{(n)}+n\cdot u'\cdot y_1^{(n-1)}+\dots+nu^{(n-1)}y_1'+u^{(n)}y_1]\end{cases}$$

απ' όπου έχουμε: $0=L(y_1)u+A_0u'+A_1\cdot u''+\dots+A_{n-1}u^{(n)}$

κι επειδή $u\cdot L(y_1)=0$, για $u=u'$ παίρνουμε:

$A_{n-1}\cdot u^{(n-1)}+A_{n-2}\cdot u^{(n-2)}+\dots+A_1\cdot u'+A_0\cdot u=0$

με:

$A_{n-1}=a_ny_1\neq 0$

$A_{n-2}=n\cdot a_n\cdot y_1'+a_{n-1}\cdot y_1$

$A_{n-3}=\dots$

$\vdots$

$A_0=n\cdot a_ny_1^{(n-1)}+\dots+a_1y_1$

Αν $S=\{u_1,\dots,u_{n-1}\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0^*) και

$$y_i(t)=y_1(t)\cdot\int_{t_0}^{t}u_{i-1}(s)\,ds,\ t\in I,\ i=2,\dots,n$$

τότε οι y_i, $i=1,\dots,n$ είναι λύσεις της εξίσωσης.

Επίσης, αν $c_i, i=1,..,n$ σταθερές τέτοιες ώστε:
$c_1y_1(t)+..+c_ny_n(t)=0,\ t\in I$, είναι:
$$c_1y_1(t)+c_2y_1(t)\int_{t_0}^{t}u_1(s)ds+..+c_ny_1(t)\int_{t_0}^{t}u_{n-1}(s)ds=0,\ t\in I$$
$$\Rightarrow y_1(t)\left[c_1+c_2\int_{t_0}^{t}u_1(s)ds+..+c_n\int_{t_0}^{t}u_{n-1}(s)ds\right]=0,\ t\in I$$
Από την τελευταία σχέση για $t=t_0$ έχουμε $c_1=0$, οπότε:
$$c_2\int_{t_0}^{t}u_1(s)ds+..+c_n\int_{t_0}^{t}u_{n-1}(s)ds=0,\ t\in I$$
και με παραγώγιση: $c_2u_1(t)+..+c_nu_{n-1}(t)=0,\ t\in I$.
Επομένως, $c_2=..=c_n=0$
Δηλαδή, έχουμε: $c_1y_1(t)+..+c_ny_n(t)=0, t\in I \Rightarrow c_1=..=c_n$
και οι λύσεις της (E_0^n) $\{y_i(t), t\in I\ (i=1,..,n)\}$ είναι γρ. ανεξάρτητες.

(Πx) Παράδειγμα 6, σελ. 80.
Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις $u_1(t)=t,\ u_2(t)=t\cdot\log t,\ t>0$ αποτελούν ένα βασικό σύνολο της εξίσωσης: $t^2u''-tu'+u=0,\ t>0$.
Στη συνέχεια να λυθεί η ομογενής γ.δ.ε. τρίτης τάξης:
$t^3y'''-4t^2y''+9ty=0,\ t>0$ αφού διαπιστωθεί ότι η $y_1(t)=t,\ t>0$ είναι μία λύση της.
Λύση: Είναι $W(u_1,u_2)(t)=\begin{vmatrix} t & t\log t \\ 1 & \log t+1\end{vmatrix}=t>0$
Για $y=tu$, η διαφορική εξίσωση (**) γίνεται: $t^2u'''-tu''+u'=0,\ t>0$
απ' όπου για $u'=u$ παίρνουμε $t^2u''-tu'+u=0,\ t>0$
η οποία έχει ως βασικό σύνολο λύσεων το $\{u_1(t)=t,\ u_2=t\cdot\log t,\ t>0\}$
Με χρήση του θεωρ. (9), ένα β.σ.λ. της (*) είναι το σύνολο:
$$\left\{y_1(t)=t,\ y_2(t)=y_1(t)\int_1^t u_1(s)ds,\ y_3(t)=y_1(t)\int_1^t u_2(s)ds\right\}$$
Βρίσκουμε $y_2(t)=t\cdot\int_1^t s\,ds=\frac{1}{2}(t^3-t)$ και
$$y_3(t)=t\cdot\int_1^t s\log\,ds=t\left[\frac{s^2}{2}\log s\Big|_1^t-\int_1^t\frac{s^2}{2}\frac{1}{s}ds\right]=t\left[\frac{t^2}{2}\log t-\int_1^t\frac{s}{2}ds\right]=$$

$$= t\left[\frac{t^2}{2}\log t - \int_1^t \frac{t^2}{4}-\frac{1}{4}\,ds\right] = \frac{1}{2}(t^3\log t) - \frac{1}{4}(t^3-t).$$

Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (*) δίνονται από τον τύπο:

$$y(t) = c_1 t + c_2\frac{1}{2}(t^3-t) + c_3\left[\frac{1}{2}(t^3\log t) - \frac{1}{4}(t^3-t)\right],\ t>0$$

Πχ

<u>Άσκηση 5, σελ. 83:</u> Να επιλυθεί η γ.δ.ε. $(2t+1)y''-4(t+1)y'+4y=0$, $t>-\frac{1}{2}$ αν είναι γνωστό ότι δέχεται μία λύση της μορφής: e^{ct}, $t>-1/2$.

<u>Λύση:</u> Θα πρέπει να είναι: $(2t+1)c^2e^{ct}-4(t+1)ce^{ct}+4e^{ct}=0$, $t>-1/2$.

και επειδή $e^{ct}\neq 0$, $t>-1/2$: $(2t+1)c^2-4(t+1)c+4=0$

απ' όπου για $t=0$ βρίσκουμε: $c^2-4c+4=0 \Longrightarrow c=2$.

Πράγματι, η συνάρτηση $y_1(t)=e^{2t}$, $t>-1/2$ είναι μία λύση της εξίσωσης.

Για $y=ue^{2t}$ έχουμε:

$0=(2t+1)y''-4(t+1)y'+4y=(2t+1)[u4e^{2t}+4u'e^{2t}+u''e^{2t}]-4(t+1)[u2e^{2t}+u'e^{2t}]+4e^{2t}u.$

και $0=(2t+1)[4u'e^{2t}+u''e^{2t}]-4(t+1)u'e^{2t}$

απ' όπου για $u=u'$ παίρνουμε:

$$(2t+1)u'+4tu=0 \Rightarrow u'+\frac{4t}{2t+1}u=0 \Rightarrow u'+\left(2-\frac{2}{2t+1}\right)u=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει την λύση: $u'=u=e^{-2t}(2t+1)$

απ' όπου με ολοκλήρωση έχουμε:

$$u=\int e^{-2t}(2t+1)\,dt = -e^{-2t}(t+1)$$

Επομένως, η συνάρτηση $y_2(t)=-(t+1)$, $t>-1/2$ είναι μία λύση της αρχικής εξίσωσης τ.ω. το σύνολο $\{y_1,y_2,t>-1/2\}$ να είναι ένα β.σ.λ. της εξίσωσης (E_2^0).

Άσκηση: Να αποδειχθεί ότι αν y_1,y_2 είναι δύο λύσεις μίας ομογενούς γ.δ.ε. n-τάξης για τις οποίες είναι $y_1(t)\neq 0$, $t\in I$ και $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'\neq 0$, $t\in I$, τότε η ομογενής γ.δ.ε. n-τάξης ανάγεται σε μία ομογενή γ.δ.ε. n-2-τάξης.

- **Ομογενείς εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές:**

$y'+py=0$, $p\in\mathbb{R} \to y(t)=c\cdot e^{-pt}$, $t\in\mathbb{R}$

$y''+by'+cy=0$, $b,c\in\mathbb{R}$

$y(t)=e^{\lambda t} \to \lambda^2\cdot e^{\lambda t}+b\cdot\lambda\cdot e^{\lambda t}+c\cdot e^{\lambda t}=0$, $t\in\mathbb{R}$

$\lambda^2+b\lambda+c=0$

(i) $\Delta>0$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$

$y_1=e^{\lambda_1 t}$, $y_2=e^{\lambda_2 t}$

$$W(t)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1\cdot e^{\lambda t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t}\end{vmatrix}=(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}\neq 0,\ t\in\mathbb{R}$$

(ii) $\Delta=0$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, $\lambda=-b/2$, $y_1=e$

$y=y_1\cdot u=ue^{\lambda t}$

τότε: $u''e^{\lambda t}+2u'\lambda e^{\lambda t}+u\cdot\lambda^2e^{\lambda t}$

$+b(u'e^{\lambda t}+ue^{\lambda t}\cdot\lambda)+c\cdot u\cdot e^{\lambda t}=0$ $\quad|\ u''=0$

$\Rightarrow e^{\lambda t}(\lambda^2+\lambda b+c)u + e^{\lambda t}[u''+(2\lambda+b)u]=0$

$\Rightarrow u=c_1t+c_2$

$\Rightarrow y_1=e^{\lambda t}$, $y_2=t\cdot e^{\lambda t}$

(iii) $\Delta<0 \to \lambda_1=\sigma+i\tau$, $\lambda_2=\sigma-i\tau$, $\sigma,\tau\in\mathbb{R}$, $\tau\neq 0$.

$y_1=e^{(\sigma+i\tau)t}$, $y_2=e^{(\sigma-i\tau)t}$, $t\in\mathbb{R}$

$y_1=e^{\sigma\tau[\cos\tau t+i\sin t\tau]}$, $t\in\mathbb{R}$

$y_2=\ \dots$

$y_3=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2=\cancel{\frac{1}{2}}e^{\sigma\tau}\cos\tau t$ // $y_4=e^{\sigma\tau}\sin\tau t$

$$W=\begin{vmatrix} e^{\sigma t}\cos\tau t & e^{\sigma t}\sin\tau t \\ \sigma e^{\sigma t}\cos\tau t-\tau e^{\sigma t}\sin\tau t & \sigma\cdot e^{\sigma t}\sin\tau t+\tau\cdot e^{\sigma t}\cos\tau t\end{vmatrix}$$

$y_1=e^{\sigma t}\cos\tau t$, $y_2=e^{\sigma t}\sin t\tau$.